

MÔN LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

Giảng viên: ThS. Mai Chiém Tuấn

CHƯƠNG VI

ĐỒ THI PHẪNG VÀ TÔ MÀU ĐỒ THI

Giảng viên: ThS. Mai Chiém Tuấn

Chương VI: ĐỒ THỊ PHẪNG VÀ TÔ MÀU Đ. THỊ



1

VI.1 Đồ thị phẳng

2

VI.2 Tô màu đồ thị

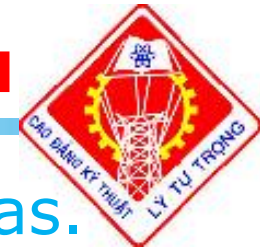
3

VI.3 Bài toán xếp lịch

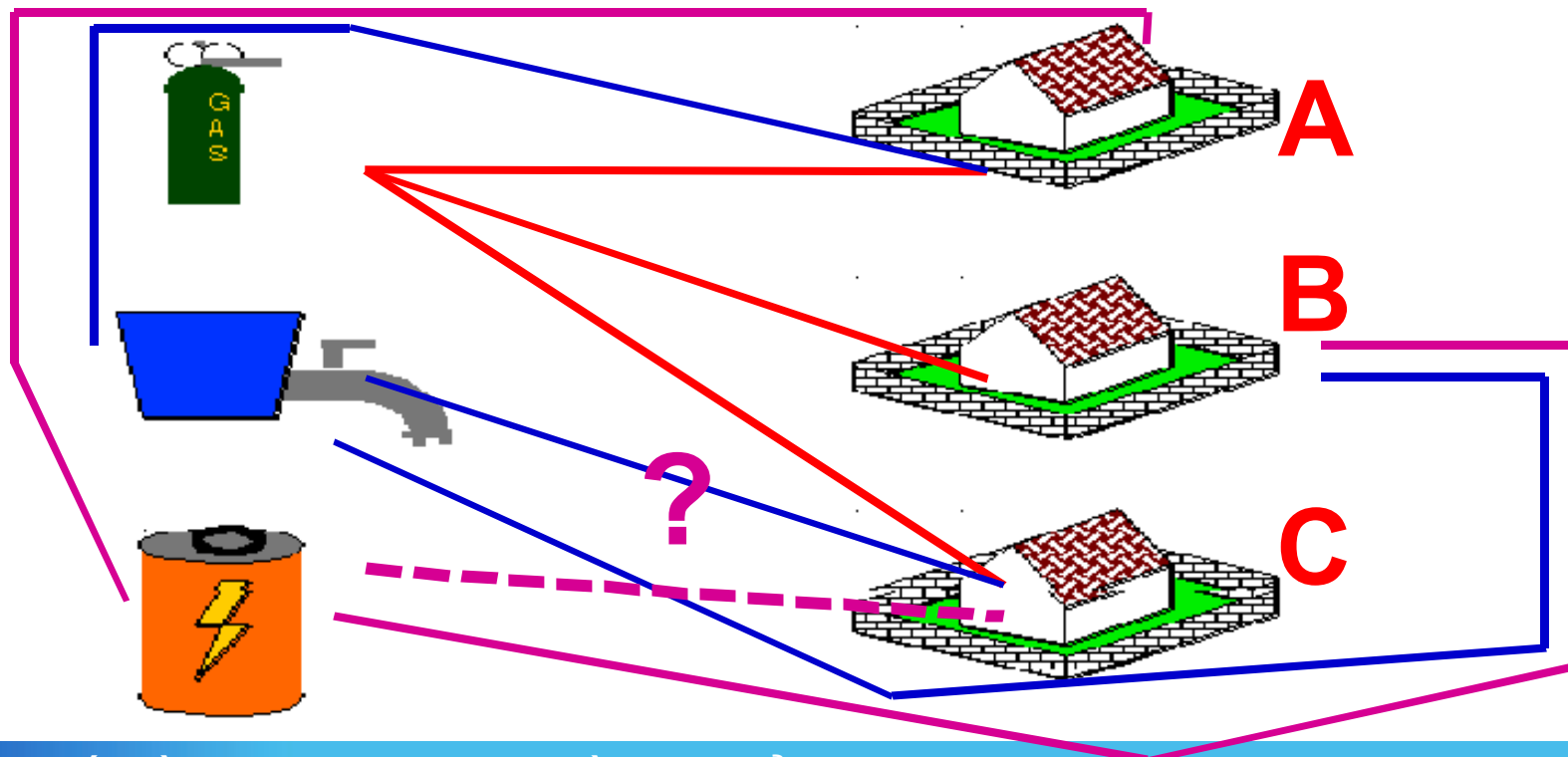
4

VI.4 Bài tập

VI.1 Đồ thị phẳng - Bài toán mở đầu



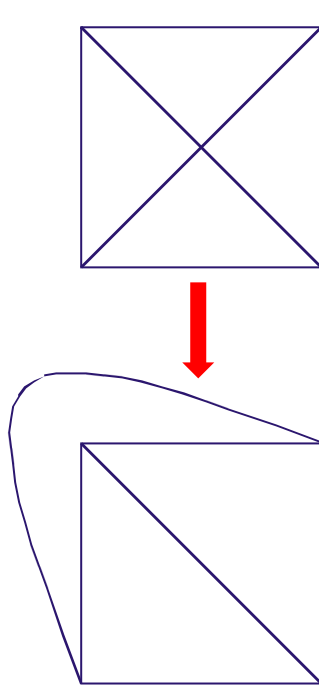
- ❖ Có 3 gia đình, 3 nhà cung cấp điện, nước, gas.
- ❖ Các gia đình đều cần điện, nước, gas và đều muốn đi dây riêng.
- ❖ Cần nối dây từ các gia đình đến các nhà cung cấp sao cho không dây nào cắt dây nào.



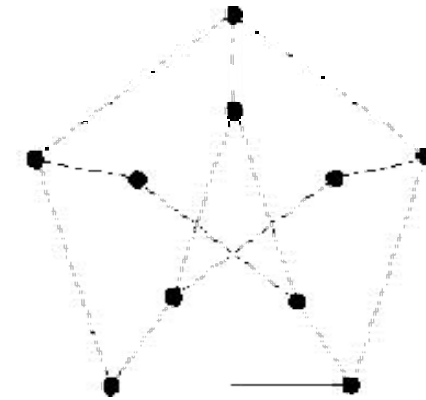
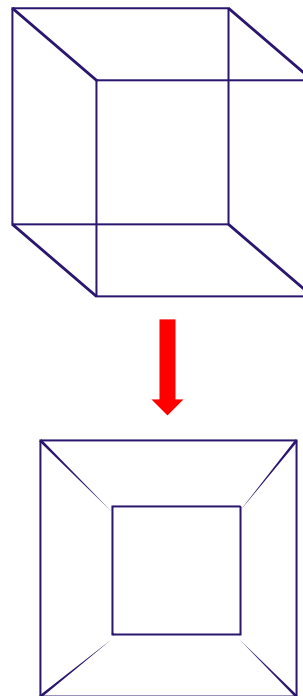
VI.1 Đồ thị phẳng



❖ **Định nghĩa 6.1:** Đồ thị được gọi là đồ thị phẳng nếu ta có thể vẽ nó trên mặt phẳng sao cho các cạnh của nó không cắt nhau ngoài ở đỉnh. Cách vẽ như vậy sẽ được gọi là **biểu diễn phẳng của đồ thị**. Ví dụ 6.1



Đồ thị
phẳng

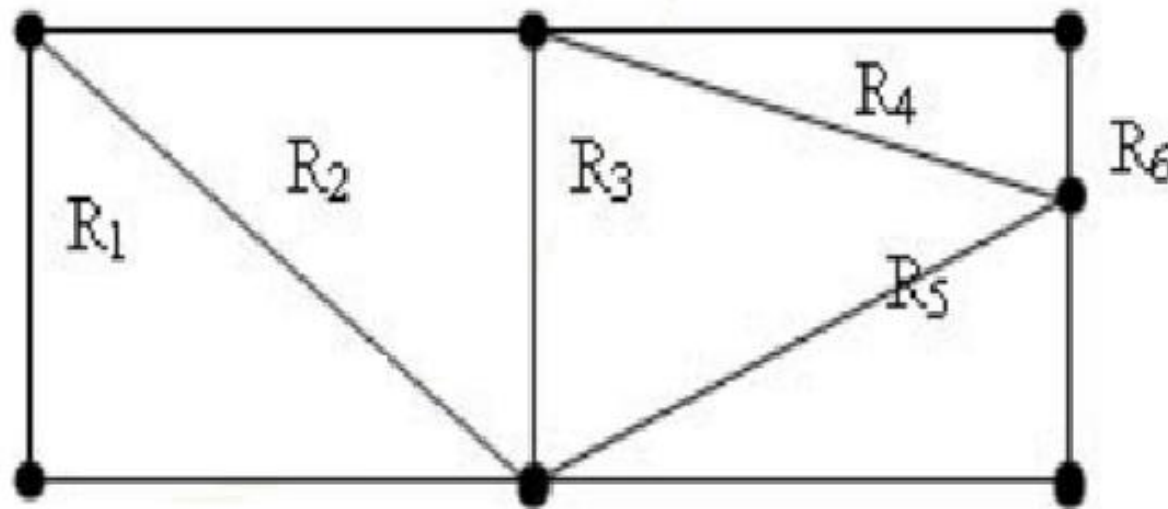


Không là
đồ thị
phẳng

VI.1 Đồ thị phẳng



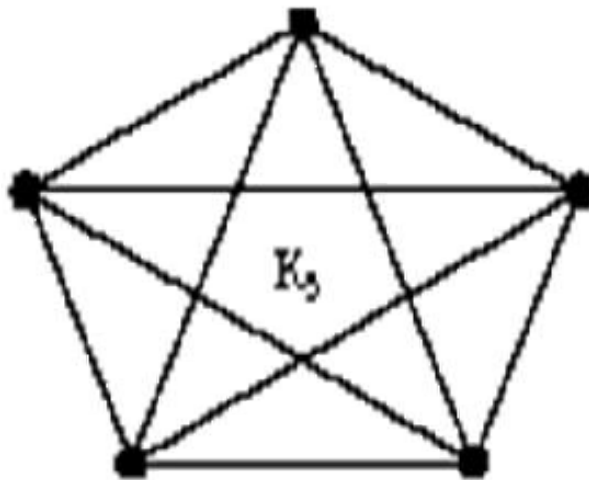
- ❖ Biểu diễn phẳng của đồ thị sẽ chia mặt phẳng ra thành các miền, trong đó có thể có cả miền không bị chặn.
- ❖ Ví dụ 6.2: Biểu diễn phẳng của đồ thị cho trong hình sau, chia mặt phẳng ra thành 6 miền $R_1, R_2, \dots, R_6$.



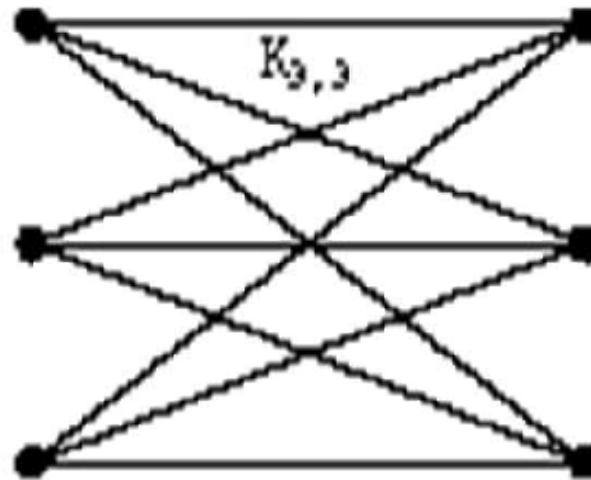
VI.1 Đồ thị phẳng



❖ Ví dụ 6.3: Các đồ thị không phẳng nổi tiếng



Đồ thị K_5 – đồ thị đầy đủ

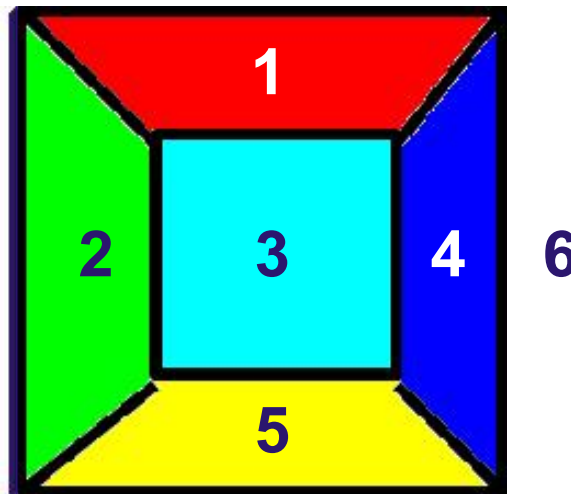


Đồ thị $K_{3 \times 3}$ – đồ thị hai phía đầy đủ

VI.1 Đồ thị phẳng



❖ Ví dụ 6.4: Xét đồ thị sau:

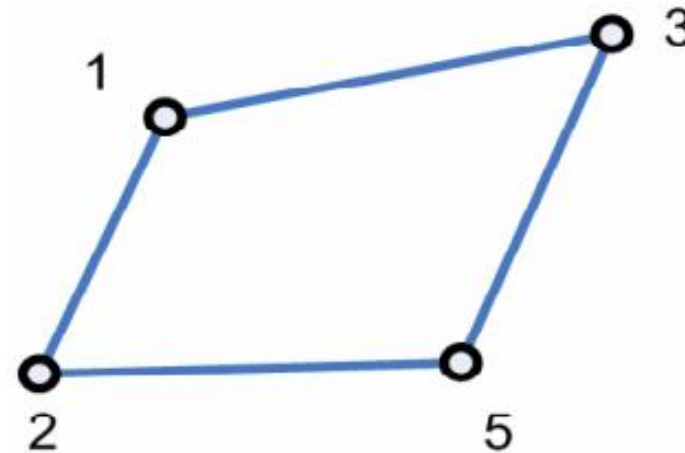


VI.1 Đồ thị phẳng



- ❖ **Định lý Euler:** Giả sử $G = (V, E)$ là đồ thị phẳng, liên thông với m cạnh và n đỉnh. Gọi f là số miền của mặt phẳng bị chia bởi biểu diễn phẳng của G . Khi đó: $f = m - n + 2$.
- ❖ **Ví dụ 6.5:** Cho đồ thị như hình sau. Tìm số của mặt phẳng bị chia bởi biểu diễn phẳng của G ?

Số cạnh: $m = 4$, Số đỉnh: $n = 4$,
Số miền: $f = 4 - 4 + 2 = 2$.



VI.1 Đồ thị phẳng



- ❖ **Ví dụ 6.6:** Cho G là đồ thị phẳng liên thông với 20 đỉnh, mỗi đỉnh đều có bậc là 3. Hỏi mặt phẳng bị chia làm bao nhiêu phần bởi biểu diễn phẳng của đồ thị G ?
- ❖ **Giải:** Do mỗi đỉnh của đồ thị đều có bậc là 3, nên tổng bậc của các đỉnh là $3 \times 20 = 60$. Từ đó suy ra số cạnh của đồ thị $m = 60 / 2 = 30$. Vì vậy, theo công thức Euler, số miền cần tìm là $r = 30 - 20 + 2 = 12$.

VI.1 Đồ thị phẳng



- ❖ **Hệ quả.** Nếu G là đơn đồ thị phẳng liên thông với m cạnh, n đỉnh, trong đó $n \geq 3$. Khi đó ta có:

$$m \leq 3n - 6$$

- ❖ **Chứng minh:**

- Gọi r là số miền.
- Mỗi miền đều tương ứng với ít nhất 3 cạnh.
- Mỗi cạnh tương ứng với đúng 2 miền.
- Gọi bậc của mỗi miền là số cạnh tương ứng với nó.
- Suy ra, tổng bậc của các miền ít nhất là bằng 2 lần số cạnh.

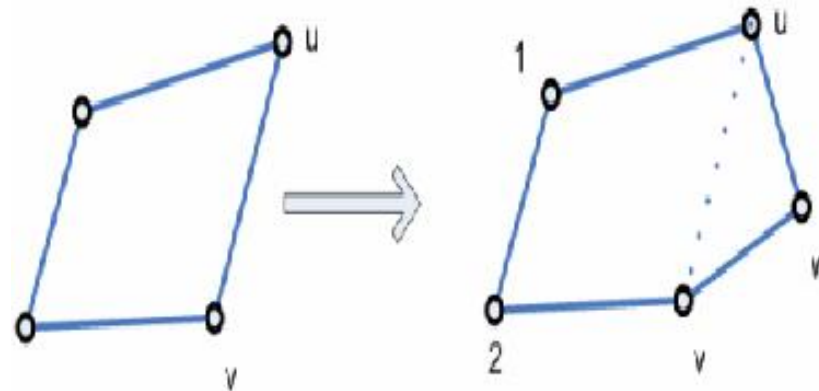
$$2.e = \sum_R \deg(R) \geq 3.r$$

- Áp dụng công thức Euler suy ra điều phải chứng minh.

VI.1 Đồ thị phẳng



- ❖ **Phép chia cạnh (u, v) :** là việc ta bỏ đi cạnh (u, v) và thêm vào một đỉnh mới w cùng với hai cạnh (u, w) , (w, v) .

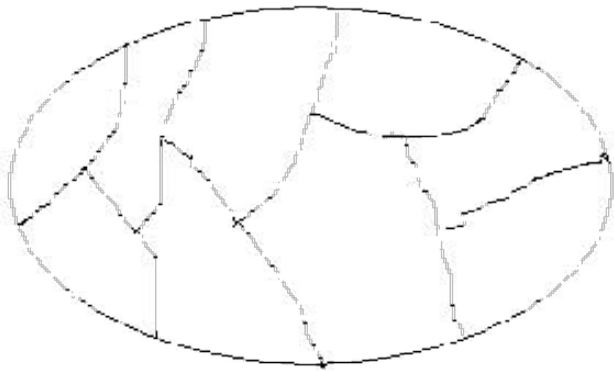


- ❖ **Định nghĩa đồng cấu:** Hai đồ thị được gọi là đồng cấu nếu chúng có thể thu được từ cùng một đồ thị nào đó nhờ các phép chia cạnh.
- ❖ **Định lý Kuratowski:** Điều kiện cần và đủ để một đồ thị là phẳng là đồ thị này không chứa bất kỳ một đồ thị con nào đồng cấu với $K_{3,3}$ và K_5 .

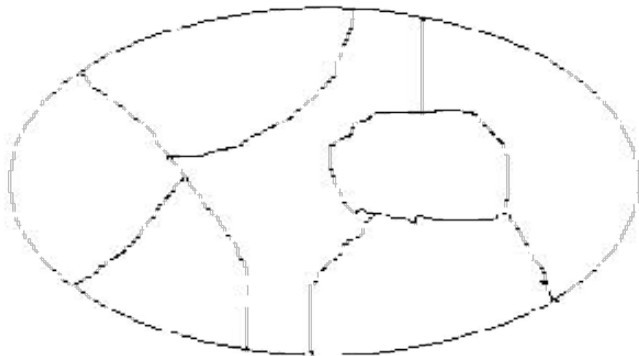
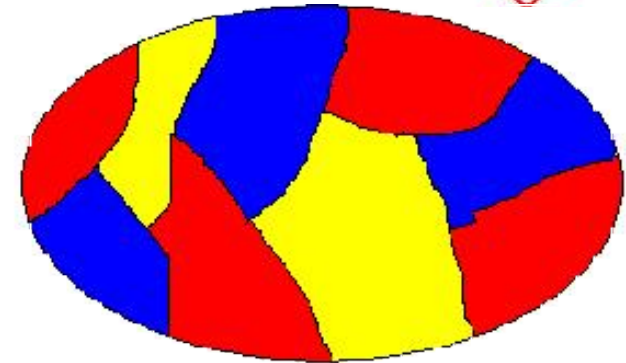
VI.2 Tô màu đồ thị



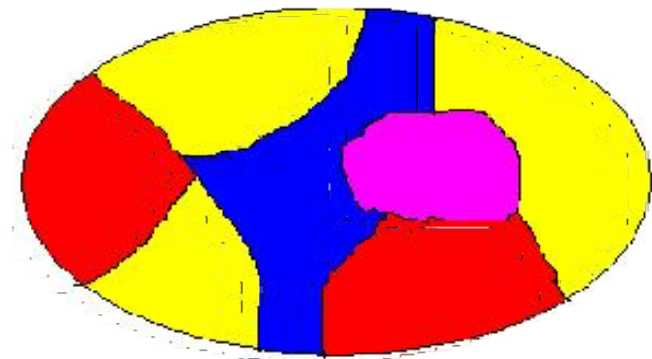
VI.2 Tô màu đồ thị



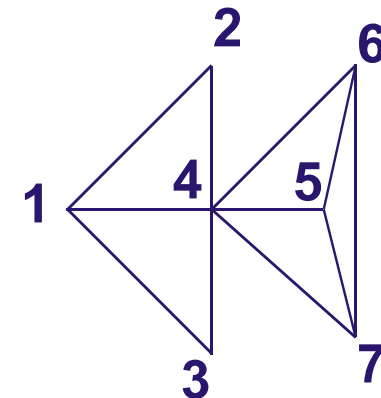
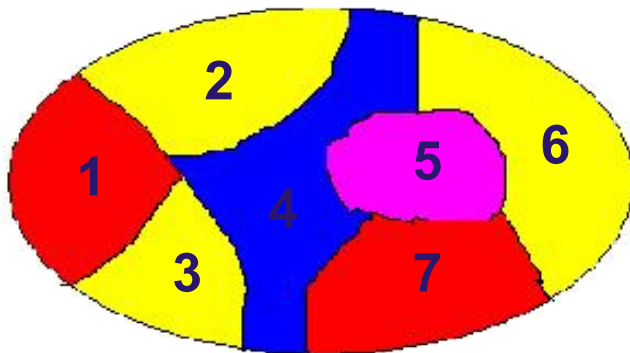
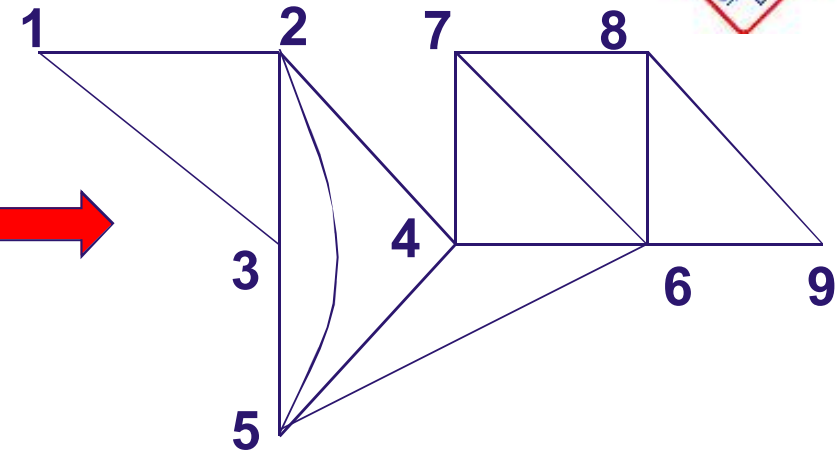
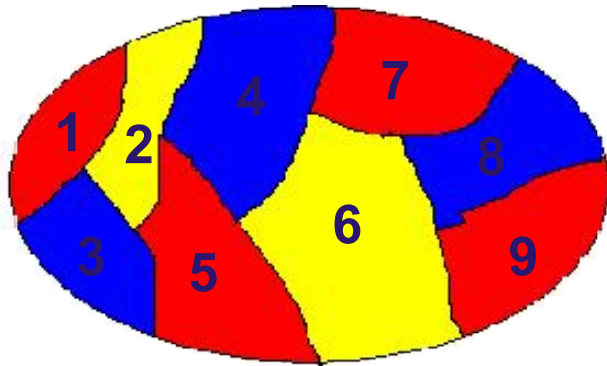
Phải dùng 3
màu để tô



Phải dùng 4
màu để tô



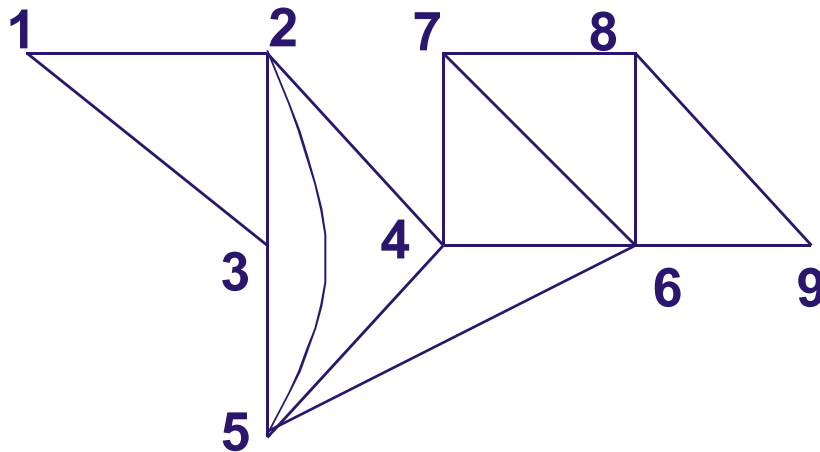
VI.2 Tô màu đồ thị



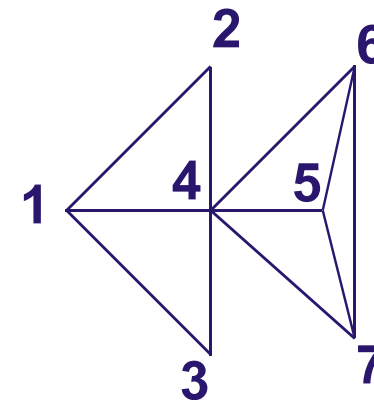
VI.2 Tô màu đồ thị



- ❖ **Định nghĩa:** Tô màu một đồ thị vô hướng là một sự gán màu cho các đỉnh sao cho hai đỉnh kề nhau phải khác màu nhau.
- ❖ **Định nghĩa:** Số màu (*sắc số*) của một đồ thị là số màu tối thiểu cần thiết để tô màu đồ thị này.



Đồ thị có số màu là 3



Đồ thị có số màu là 4

VI.2 Tô màu đồ thị



- ❖ **Định lý** (Định lý 4 màu): Số màu của một đồ thị phẳng là không lớn hơn 4.
- ❖ Một số thông tin liên quan:
 - Bài toán được đưa ra năm 1850.
 - Có rất nhiều chứng minh sai về bài toán này.
 - Chứng minh sai nổi tiếng là của Alfred Kempe vào năm 1879.
 - Percy Heawood phát hiện ra chứng minh sai ở trên vào năm 1890.
 - Dựa vào đó, năm 1976 Appel và Haken đã chứng minh bằng cách sử dụng máy tính.

VI.2 Tô màu đồ thị



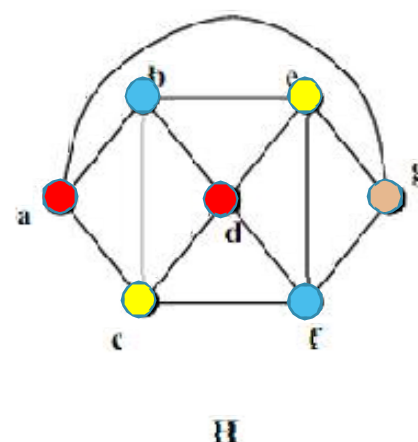
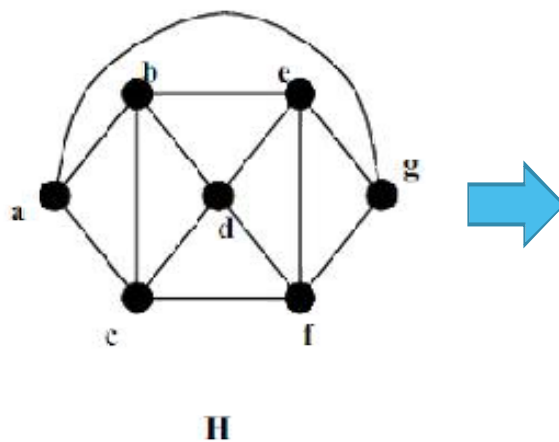
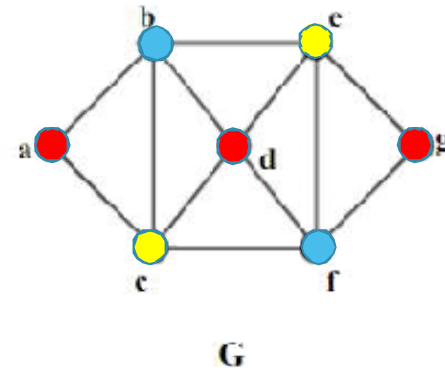
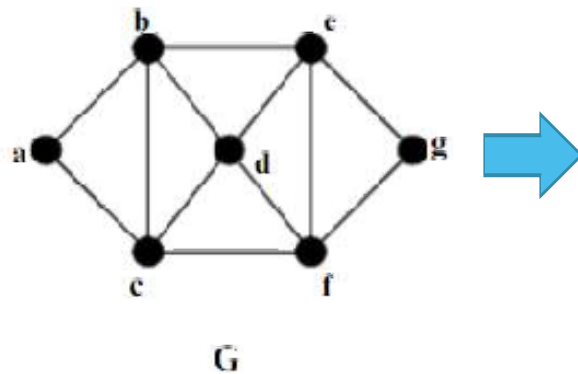
❖ Giải thuật tô màu đồ thị:

- Dùng màu thứ nhất tô cho tất cả các đỉnh của đồ thị mà có thể tô được,
- Sau đó dùng màu thứ hai tô tất cả các đỉnh của đồ thị còn lại có thể tô được và cứ như thế cho đến khi tô hết cho tất cả các đỉnh của đồ thị.

VI.2 Tô màu đồ thị



❖ Ví dụ 6.7: Tìm số màu của đồ thị G và H

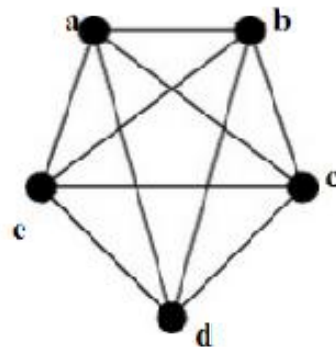


VI.2 Tô màu đồ thị

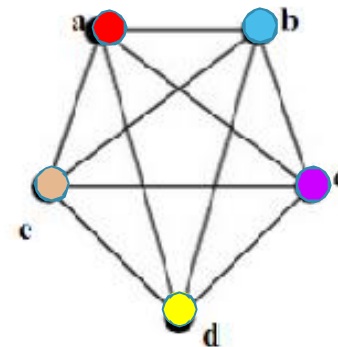


Ví dụ 6.7: Tìm số màu của đồ thị đầy đủ K_n ?

- ❖ Ta có thể tô màu n đỉnh của K_n bằng n màu riêng biệt. Liệu có cách tô nào tiết kiệm màu hơn không? Câu trả lời là không.
- ❖ Thật vậy, không có 2 đỉnh nào có thể tô cùng màu vì mọi đỉnh đều kề nhau. Vậy ,ta có $c(K_n) = n$.
- ❖ **Chú ý:** K_n không phải đồ thị phẳng khi $n \geq 5$, do đó kết quả này không vi phạm định lí 4 màu. H5 cho ta ví dụ về việc tô màu K_5



Tô màu K_5 .

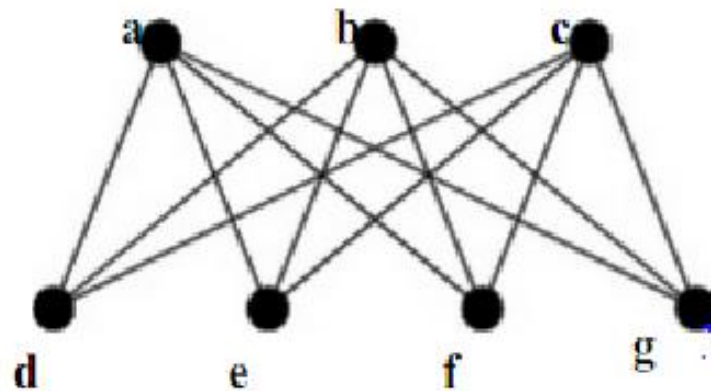


Tô màu K_5 .

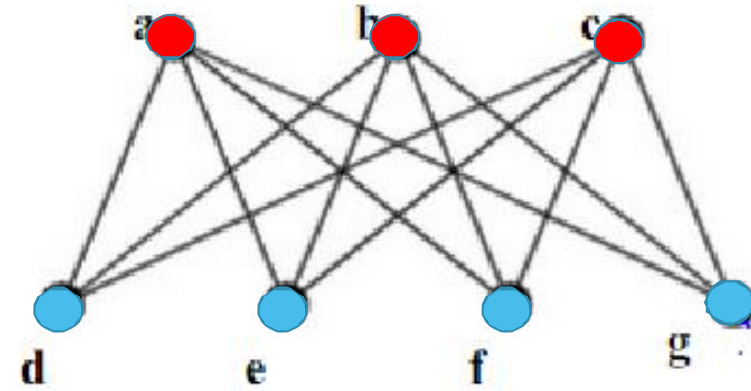
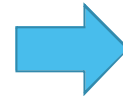
VI.2 Tô màu đồ thị



Ví dụ 6.8: Tìm số màu của đồ thị 2 phía đầy đủ $K_{m,n}$ với m và n là 2 số nguyên dương ?



H6. Tô màu $K_{3,4}$.



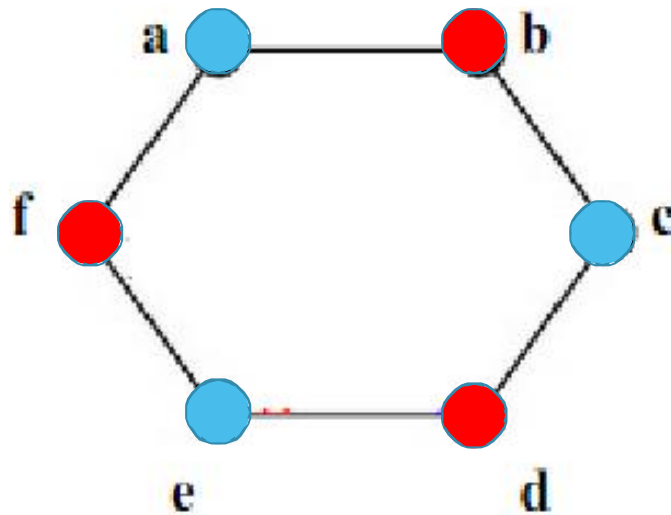
H6. Tô màu $K_{3,4}$.

VI.2 Tô màu đồ thị

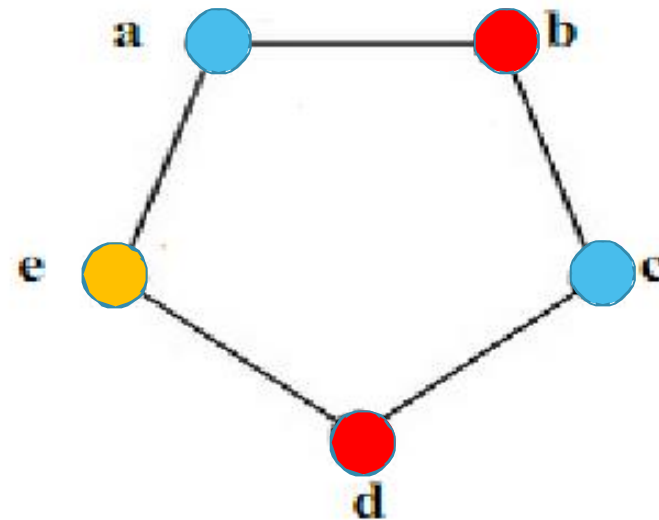


Ví dụ 6.9: Tìm số màu của đồ thị C_n ?

- ❖ Nếu n chẵn: Ta chỉ cần sử dụng 2 màu.
- ❖ Nếu n lẻ và $n > 1$: Số màu của đồ thị là 3.



C_6



C_5

VI.3 Bài toán xếp lịch



❖ Bài toán lập lịch thi: Hãy lập lịch thi trong một trường đại học sao cho không có sinh viên nào thi hai môn cùng một lúc.

❖ Giải pháp:

- Biểu diễn bằng đồ thị:
 - Mỗi môn học là một đỉnh
 - Nếu 2 môn học nào được dự thi bởi cùng 1 sinh viên thì sẽ nối bằng 1 cạnh.
 - Cách lập lịch sẽ tương ứng với bài toán tô màu của đồ thị này.

VI.3 Bài toán xếp lịch



❖ **Ví Dụ: Có 7 môn thi với thông tin như sau:**

- Môn 1: có các sinh viên A, B, C và D thi
- Môn 2: có các sinh viên A, E, F, G và H thi
- Môn 3: có các sinh viên B, E, I, J và K thi
- Môn 4: có các sinh viên B, F, L và M thi
- Môn 5: có các sinh viên G, L, N và O thi
- Môn 6: có các sinh viên J, M, N và P thi
- Môn 7: có các sinh viên D, H, K, O và P thi

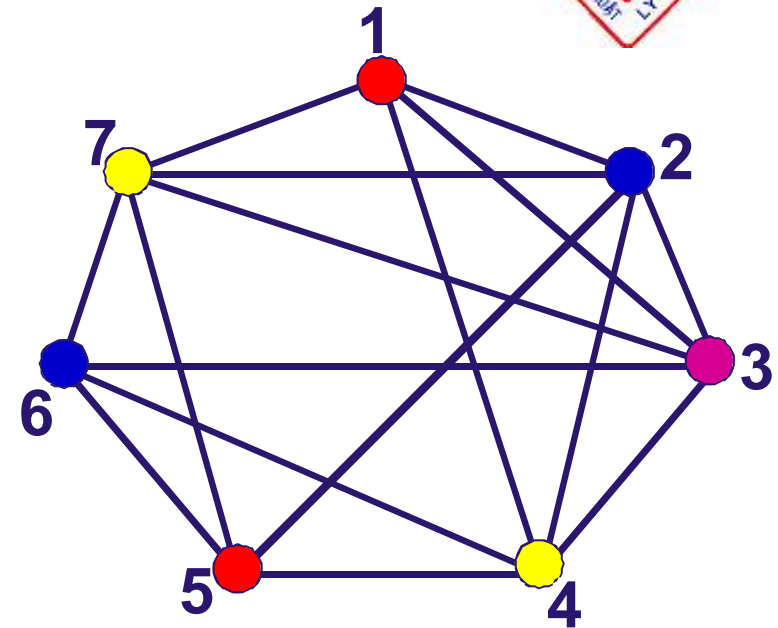
Hãy xếp lịch thi thành các đợt sao cho các sinh viên đều có thể dự thi tuần tự các môn mình đăng ký

VI.3 Bài toán xếp lịch



❖ **Ví Dụ:** Có 7 môn thi với thông tin như sau:

- Môn 1: có các sinh viên A, B, C và D thi.
- Môn 2: có các sinh viên A, E, F, G và H thi.
- Môn 3: có các sinh viên B, E, I, J và K thi.
- Môn 4: có các sinh viên B, F, L và M thi.
- Môn 5: có các sinh viên G, L, N và O thi.
- Môn 6: có các sinh viên J, M, N và P thi.
- Môn 7: có các sinh viên D, H, K, O và P thi.

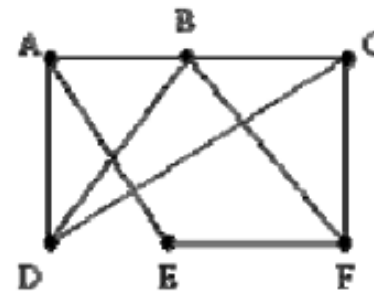
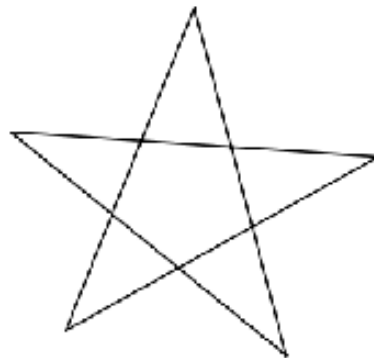
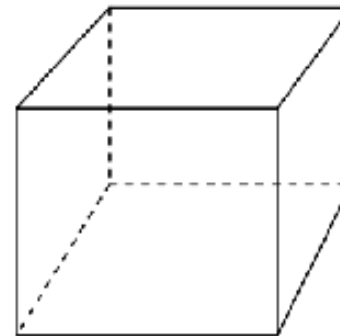
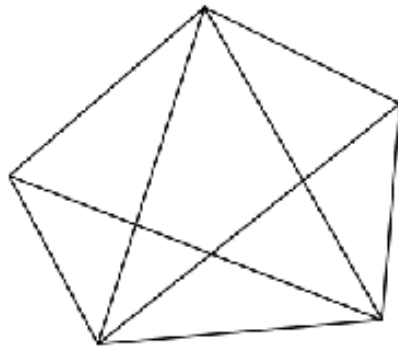


Đợt thi	Môn thi
1	1, 5
2	2, 6
3	3
4	4, 7

VI.3 Bài tập



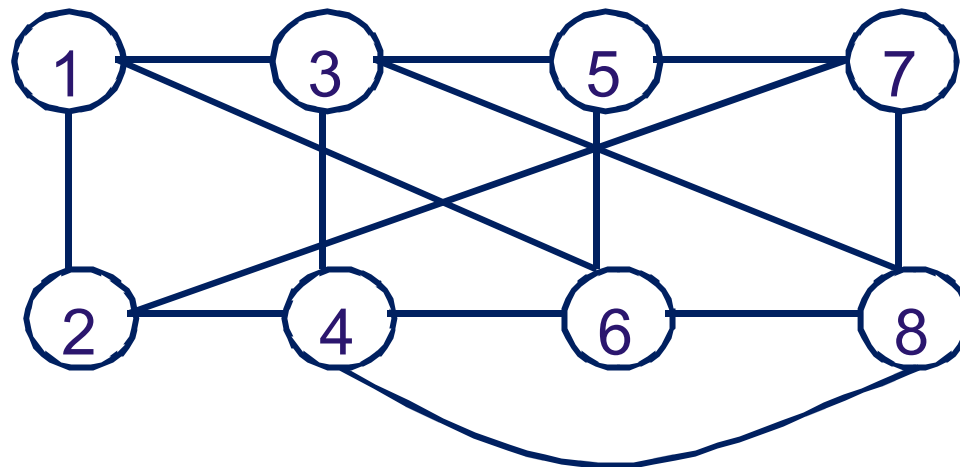
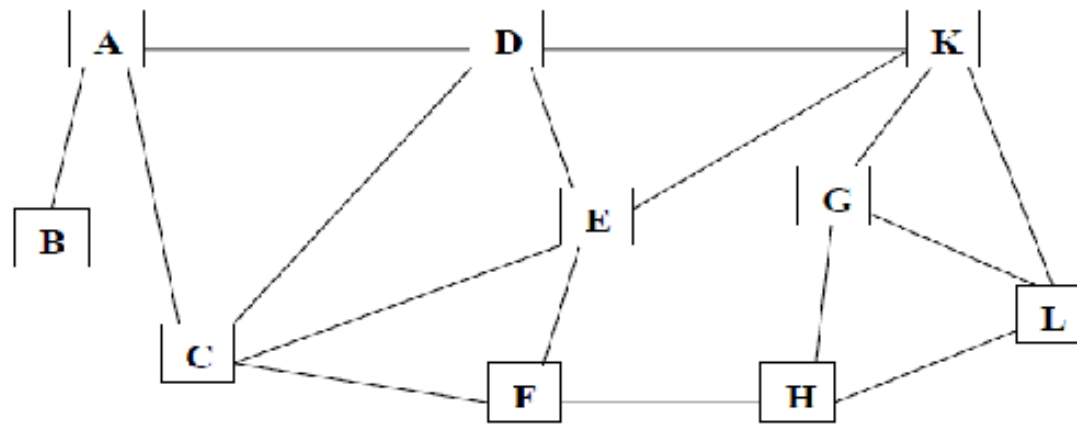
1. Với mỗi đồ thị sau đây hãy cho biết nó có phải là đồ thị phẳng hay không ? Nếu có hãy vẽ sao cho các cạnh của đồ thị đó không cắt nhau ngoài đỉnh.



VI.3 Bài tập



2. Hãy tìm sắc số của các đồ thị sau:



Q & A?